

## ЗАСТОСУВАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ БАНКУ

### APPLICATION OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL METHODS IN THE PROCESS OF FORMING A LOAN PORTFOLIO OF THE BANK

УДК 338.58:65.014

**Стадник Ю.А.**

к.е.н., доцент кафедри економічної  
кібернетики  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка

**Воляннюк Х.І.**

студентка  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка

*Статтю присвячено застосуванню методів теорії ймовірностей та математичного програмування у процесі здійснення банківською установою кредитних операцій.*

**Ключові слова:** кредитний портфель, банківський кредит, очікуваний дохід, схильність до ризику, кредитний ризик, економіко-математичне моделювання.

*Статья посвящена применению методов теории вероятностей и математического программирования в процессе*

*осуществления банковским учреждением кредитных операций.*

**Ключевые слова:** кредитный портфель, банковский кредит, ожидаемый доход, склонность к риску, кредитный риск, экономико-математическое моделирование.

*The article is devoted to the application of methods of probability theory and mathematical programming in the process of carrying out credit operations by a bank institution.*

**Key words:** loan portfolio, bank credit, expected income, bank's attitude to risk, credit risk, mathematical modelling in economics.

**Постановка проблеми.** Дослідження проблеми формування прибуткового кредитного портфеля банку, що реалізується з позиції реальної практики, є необхідним для підвищення ефективності діяльності кожного банку. Кредитний портфель комерційного банку є одним із найризикованіших напрямів і найвагоміших компонентів структури відсоткових доходів. Головна мета управління кредитним портфелем комерційного банку полягає у забезпеченні максимальної доходності за певного рівня ризику. Доходність і ризик є основними параметрами, що характеризують якість кредитного портфеля.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

Вивченню проблеми оцінки кредитного ризику та оптимізації процесу управління кредитним портфелем банку приділяли увагу такі українські вчені, як: В. Грушко, Н. Жукова, І. Семенча, О. Молдавська, В. Базилевич, В. Геєць, О. Корольов, І. Ткаченко, О. Устинко; серед зарубіжних – М. Грубер, А. Гроппелі, Е. Елтон, Дж. Лінтнер, Дж. Нейман, У. Шарп та ін.

**Постановка завдання.** Мета статті – виконати оцінку очікуваного доходу на рівні окремої позики та кредитного портфеля банку із застосуванням економіко-математичних методів та моделей.

#### **Виклад основного матеріалу дослідження.**

Кредитний портфель – це сукупність кредитів, наданих банком на певну дату для одержання доходу у вигляді відсотків. В умовах фінансово-економічної кризи, коли значна кількість суб'єктів господарювання ризикує втратити свою платоспроможність, ситуація в банківській сфері є особливо важкою, оскільки постає проблема повернення коштів позичальниками, що спричиняє послаблення фінансової стабільності банківських установ. Така ситуація вимагає вкладання коштів у розвиток банківського ризик-менеджменту, який узяв би на себе функції захисту кредитного портфеля банку від проблемних позик, відсіювання

потенційно ненадійних позичальників ще до прийняття рішення про надання кредиту. Все це потребує розвитку наявних та створення нових методик управління ризиком як на рівні окремої позики, так і на рівні формування кредитного портфеля банку та створення резервів під кредитні операції.

Спочатку розглянемо завдання зменшення кредитного ризику на рівні опрацювання кредитних запитів окремих потенційних позичальників.

Кредитний запит характеризується розміром позики  $V$ , тривалістю кредитної угоди  $T$  та графіком повернення позичкових коштів та відсотків за кредит на проміжку часу  $[0, T]$ . Цей графік містить інформацію про розміри майбутніх платежів  $D_i$ , які здійснюватимуться позичальником у календарні моменти часу  $t_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , де  $m$  – загальна кількість таких платежів [2].

Вважатимемо для визначеності, що тривалість  $T$  кредитної угоди вимірюється у місяцях, а платежі здійснюватимуться щомісяця у фіксованому розмірі  $D$  грошових одиниць, тобто за весь час дії кредитної угоди позичальник повинен зробити  $T$  таких платежів.

Нехай  $r$  – вибрана банком місячна нормативна ставка дисконту.

За відсутності ризику зведений чистий дохід  $N$  банку становитиме величину

$$N = -V + \sum_{t=1}^T \frac{D}{(1+r)^t} = -V + D \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+r)^t} = -V + \frac{D}{r} \left( 1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right)$$

$$\text{тобто } N = -V + \frac{D}{r} - \frac{D}{r(1+r)^T}. \quad (1)$$

Оскільки у момент надання кредиту існує ризик майбутньої втрати платоспроможності позичальника, зведений чистий дохід кредитної установи є випадковою величиною. Потрібно визначити закон розподілу цієї випадкової величини.

Нехай  $\theta$  – момент часу в майбутньому, коли позичальник утратить свою платоспроможність і з моменту часу  $\theta$  всі його платежі кредитній уста-

нові припиняються. Потрібно визначити функцію розподілу ймовірностей  $P(t)$  неперервної випадкової величини  $\theta$ .

Можна зробити припущення, що ймовірність утрати позичальником платоспроможності на нескінченно малому проміжку часу довжиною  $\Delta t > 0$  дорівнює  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ , тобто пропорційна довжині проміжку  $\Delta t$  з точністю до нескінченно малої величини більш високого порядку малості, ніж  $\Delta t$ . Вважатимемо також, що множник  $\lambda > 0$ , який характеризує конкретного позичальника з огляду на його можливу неплатоспроможність у майбутньому, не залежить від моменту часу, коли починається проміжок  $\Delta t$ . Фактично показник  $\lambda = 1$  означає, що позичальник повністю погашає весь кредит.

За наведених припущень для функції  $P(t)$  розподілу ймовірностей випадкової величини  $\theta$  випливає рівність  $P(t + \Delta t) = P(t) + (1 - P(t))(\lambda \Delta t + o(\Delta t))$ , тобто  $\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (1 - P(t))(\lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t})$ .

Після переходу до границі за  $\Delta t \rightarrow 0$  одержимо таке диференціальне рівняння щодо невідомої функції  $P(t)$ :

$$P'(t) = \lambda - \lambda P(t).$$

Розв'язок цього диференціального рівняння визначається за початкової умови  $P(0) = 0$ :

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

що свідчить про показниковий закон розподілу випадкового моменту часу  $\theta$ , коли позичальник утратить свою платоспроможність.

З'ясуємо властивості параметра  $\lambda$ , який характеризує можливу неплатоспроможність позичальника. Для цього, насамперед, обчислимо середню тривалість  $\bar{\theta}$  такого проміжку часу, впродовж якого позичальник зберігає свою платоспроможність:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \int_0^{+\infty} t P'(t) dt = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Отже, по-перше,  $\frac{1}{\lambda}$  – це очікувана тривалість випадкового проміжку часу, впродовж якого позичальник залишатиметься платоспроможним.

По-друге, оскільки тривалість кредитної угоди дорівнює  $T$  одиниць часу, параметр  $\lambda$  визначає ймовірність події, що позичальник буде платоспроможним до самого закінчення терміну дії кредитного договору. Зазначена подія – це подія  $\{\theta > T\}$ , ймовірність якої дорівнює:  $1 - P(T) = e^{-\lambda T}$ .

По третє, параметр  $\lambda$  визначається ймовірністю  $q_0$  події, що позичальник залишиться платоспроможним упродовж першого року дії кредитного договору. Дійсно, якщо тривалість проміжку часу, який починається з моменту отримання позичаль-

ником позики та має довжину один рік, позначити через  $T_0$  (йдеться про використання вибраних для дослідження одиниць виміру часу), з рівності  $q_0 = e^{-\lambda T_0}$  одержимо:  $\lambda = -\frac{\ln q_0}{T_0}$ .

Ці та інші властивості параметра  $\lambda$  дають змогу оцінювати його значення за результатами аналізу наявної у кредитній установі статистики виконання позичальниками кредитних угод, об'єктивної інформації про конкретного позичальника з використанням скоригованих моделей тощо.

Нехай  $\tau$  – це кількість платежів, які зробить позичальник до моменту втрати ним платоспроможності. Подія  $\{\tau = t\}$  – тобто позичальник зробить саме  $t$  платежів до моменту втрати ним платоспроможності, ймовірність такої події дорівнюватиме:

$$p_t = \begin{cases} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+1)}, & 0 \leq t \leq T-1; \\ e^{-\lambda T}, & t = T. \end{cases}, \quad (3)$$

Знайдемо чистий зведений дохід  $N_t$  банку, якщо позичальник зробить точно  $t$  платежів. За аналогією з (1) одержимо:

$$N_t = -V + \frac{D}{r} - \frac{D}{r(1+r)^t}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Формули повністю визначають закон розподілу ймовірностей випадкового зведеного чистого доходу банку за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальника.

Корисність випадкового прибутку дорівнює очікуваній корисності його можливих значень, тому для детермінованого еквіваленту  $\hat{N}$  випадкового зведеного чистого доходу банку за окремим кредитним запитом справджується рівняння:

$$f(\hat{N}) = \sum_{t=0}^T f(N_t) p_t \quad (5)$$

Функція корисності  $f$  у разі нейтрального ставлення кредитної установи до ризику є лінійною, тому детермінований еквівалент  $\hat{N}$  збігатиметься з очікуваним рівнем  $\bar{N}$  випадкового чистого зведеного доходу:

$$\hat{N} = \bar{N} \equiv \sum_{t=0}^T N_t p_t \quad (6)$$

Користуючись для значень  $N_t$  формулами (4), остаточно одержимо:

$$\hat{N} = -V + \frac{D}{r} + \frac{1}{c} \ln \sum_{t=0}^T e^{-\frac{cD}{r(1+r)^t}} p_t, \quad (7)$$

де параметр  $c \uparrow 0$  відповідає ставленню кредитної установи до ризику ( $c < 0$  у разі неохочності і, навпаки,  $c > 0$  у разі схильності до ризику).

Аналіз кредитного запиту завершується висновком про доцільність чи недоцільність подальшого розгляду цього запиту щодо можливості включення його до кредитного портфеля банку. Кредитний запит слушно рекомендувати до потенційно прийнятних, якщо очікувана величина доходу

Таблиця 1

Дані про розмір кредитів, відсоткові ставки, терміни позик та місячні платежі для погашення

	Розмір кредиту, V, (грн.)	Відсоткова ставка, r, (%)	Термін позики в місяцях, T, (місяці)	Місячний платіж для погашення позики, D (грн.)
Кредит 1	65000	17,50%	10	7 759,02
Кредит 2	200000	19,00%	15	18 383,62
Кредит 3	120000	25,50%	10	14 556,04
Кредит 4	450000	27,00%	15	35 679,83
Кредит 5	130000	26,00%	15	12 418,91
Кредит 6	180000	22,50%	24	9382,57
Кредит 7	125000	18,00%	9	15 011,44
Кредит 8	400000	26,50%	15	38 309,44
Кредит 9	150000	26,00%	18	10 078,77
Кредит 10	400000	26,50%	18	31 519,66

Таблиця 2

Очікуваний дохід з урахуванням імовірності втрати платоспроможності позичальником

	Дохід банку від кредитного запиту за нульової ймовірності втрати клієнтом платоспроможності N (грн.)	Очікуваний дохід з урахуванням імовірності втрати платоспроможності позичальником та ставлення банку до ризику (грн.)
Кредит 1	4 831,059	3 759,02
Кредит 2	21 773,59	18 383,62
Кредит 3	10 982,46	10 556,04
Кредит 4	99 082,78	35 679,83
Кредит 5	19 027,01	12 418,91
Кредит 6	45 181,72	9 382,57
Кредит 7	25 585,66	15 011,44
Кредит 8	125910	38 309,44
Кредит 9	31 417,88	10 078,77
Кредит 10	60 045,89	31 519,66

банку за цим запитом, розрахована за формулою (7) невід’ємна ( $\hat{N} \geq 0$ ). А якщо очікувана величина доходу від’ємна ( $\hat{N} < 0$ ), відповідний запит є для банку економічно не вигідним, з огляду на індивідуальне ставлення кредитної установи до ризику.

Для обчислення очікуваного доходу поданого до розгляду потенційними позичальниками кредитного запиту використовується формула, яка має вигляд:

$$\hat{N} = -V + \frac{D}{r} + \frac{1}{c} \ln \sum_{t=0}^T e^{-\frac{cd}{r(1+r)^t}} p_t, \quad (8)$$

де V – розмір позики;

T – тривалість кредитної угоди (зараз у місяцях);

D – розмір щомісячних платежів;

r – вибрана кредитною установою місячна нормативна ставка дисконту;

c – параметр, що відбиває ставлення кредитної установи до ризику;

$p_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$  – імовірність події.

Значення параметра c, що відображає ставлення кредитної установи до ризику, може бути визначене двома способами:

1) за ймовірністю отримання прибутку  $c = \frac{1}{W} \ln \frac{1-p}{p}$ , де p – ймовірність отримання доходу, W – очікуваний розмір доходу;

2) за детермінованим еквівалентом  $\hat{w}$  очікуваного доходу  $c = \frac{\ln v}{W}$ , де  $\hat{w}$  – детермінований еквівалент лотереї  $\langle -W; W \rangle$ , в якій з однаковими ймовірностями можна або отримати дохід у розмірі W, або збиток – W; v – відмінний від одиниці корінь рівняння  $2v^{\frac{\hat{w}}{W}} = v + \frac{1}{v}$ .

Визначимо очікуваний дохід кредитних запитів умовних позичальників банківської установи. Результати розрахунку доходу банку від кожного кредитного запиту за нульової ймовірності втрати клієнтом платоспроможності та очікуваного доходу з урахуванням ймовірності втрати платоспроможності позичальниками і ставлення банківської установи до ризику наведено в табл. 2.

Як показують розрахунки, серед розглянутих кредитних запитів немає економічно не вигідних, оскільки очікуваний дохід за ними з урахуванням ймовірності втрати платоспроможності позичальником та ставлення банку до ризику є додатним.

Наступним кроком є формування структури кредитного портфеля банку з розглянутих позик з урахуванням обсягу наявних у банку коштів для проведення активних операцій, джерел формування та динаміки його пасивів; структури та доходності раніше сформованого портфеля активів тощо. Крім того, комерційний банк повинен дотримуватися регулюючих нормативів, установлених НБУ, що стосуються обсягів здійснюваних операцій та інших аспектів діяльності банку. Це завдання доцільно вирішувати із застосуванням апарату математичного програмування.

Комерційний банк планує свою кредитну діяльність у наступному періоді. Розміщення мобілізованих ресурсів може здійснюватися у т видів кредитів різних форм і видів, юридичним, фізичним особам, банкам.

Нехай основною метою діяльності банку на даний момент часу є отримання максимально можливого доходу від розміщення своїх активів. Величина відсотків за  $i$ -м кредитом, в який розглядається можливість вкладення, розраховується за формулою:

$$d_i = x_i \cdot l_i \cdot p_i \cdot T_i, \quad (9)$$

де  $x_i$  – бінарна змінна, яка може приймати значення 1 або 0 залежно від того, чи буде кредит виданий  $i$ -му позичальнику, чи ні відповідно;

$l_i$  – тіло  $i$ -го кредиту;

$p_i$  – ставка відсотка, під яку видається  $i$ -й кредит;

$T_i$  – термін, на який видається  $i$ -й кредит.

Цільова функція моделі, що максимізує очікуваний дохід банківської установи від здійснення кредитних операцій, може бути записана так:

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i \cdot p_i \cdot T_i \rightarrow \max \quad (10)$$

У сфері кредитування комерційним банком установлюються ліміти на можливий обсяг кредиту, у розрахунку на окремого позичальника залежно від виду кредиту, що записується обмеженням:

$$l_i \cdot x_i \leq s_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де  $s_i$  – величина кредитного ліміту для  $i$ -го кредиту.

Наявні у банку кошти для здійснення кредитних операцій розподіляються у межах залишків коштів на кореспондентському рахунку в НБУ з урахуванням коштів для створення резервів для відшкодування втрат у разі невиконання позичальником умов кредитного договору.

Для визначення відповідної величини резерву по окремій кредитній угоді ( $r_i$ ), в межах установленого діапазону, використовують формулу:

$$r_i = r_i^{\min} + \frac{r_i^{\max} - r_i^{\min}}{\sigma_i^{\max} - \sigma_i^{\min}} (\sigma_i - \sigma_i^{\min}), \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

де  $r_i^{\min}$  – ліва границя відповідного діапазону;

$r_i^{\max}$  – права границя відповідного діапазону;

$\sigma_i^{\min}$  – мінімальне значення середньоквадратичного відхилення очікуваного доходу за  $i$ -ю кредитною угодою;

$\sigma_i^{\max}$  – максимальне значення середньоквадратичного відхилення очікуваного доходу за  $i$ -ю кредитною угодою [5].

Тоді загальна величина резервного фонду ( $R$ ) кредитного портфеля розраховується за формулою  $R = \sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i \cdot r_i$ .

Умову неперевищення вкладеннями банку в кредитний портфель, наявних у нього ресурсів із вирахуванням коштів, необхідних для формування резерву, можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq A - \sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i \cdot r_i. \quad (13)$$

де  $A$  – наявні у банку кошти для здійснення кредитних операцій.

Отже, модель оптимізації кредитного портфеля комерційного банку для максимізації доходу від здійснення кредитних операцій можна записати так:

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i \cdot p_i \cdot T_i \rightarrow \max$$

$$l_i \cdot x_i \leq s_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq A - \sum_{i=1}^n x_i \cdot l_i \cdot r_i,$$

$$\frac{N_a + \sum_{i=1}^m x_i \cdot l_i}{P} \geq H5,$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{у випадку надання } i\text{-го кредиту,} \\ 0, & \text{у потижежному випадку} \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

За цією моделлю були виконані розрахунки, за результатами яких до включення у кредитний портфель рекомендовано всі кредити, крім 1-го та 6-го, що дасть можливість сформуванню високодохідний кредитний портфель з урахуванням описаних обмежень.

**Висновки з проведеного дослідження.** Кредитний портфель вимагає грамотного управління. Його якість може змінюватися, і завдання банківської установи – не допустити підвищення ризиків і фінансових утрат. Тому важливим завданням банківської установи є раціональна оцінка ризику як на рівні окремої позики, так і на рівні портфеля банківських кредитів. Описані у статті економіко-математичні методи та моделі дають можливість виконати оцінку очікуваного доходу за кредитами з урахуванням імовірності втрати платоспроможності позичальником та ставлення банку до ризику та сформуванню кредитний портфель банку за умов обмеженості кредитних ресурсів та регулюючих нормативів НБУ.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бугель Ю. Аналіз якості структури кредитного портфеля комерційних банків в ринкових умовах господарювання. Українська наука: минуле, сучасне,



майбутнє. Тернопіль: Економічна думка, 2011. Вип. 11. С. 51–57.

2. Гержель А. Напрями аналізу якості кредитного портфеля банку. Управління розвитком. Х.: ХНЕУ ім. Семена Кузнеця, 2014. С. 92–94.

3. Серик Ю.В. Управління кредитним портфелем банку. Економіка і управління. 2012. № 4. С. 70–75.

4. Тептя О.В. Організація системи управління кредитним портфелем у комерційному банку. Вісник ХНУ. Економічні науки. 2014. № 5. Т. 2. С. 141–144.

5. Український банківський портал. URL: <http://banker.ua/officialrating/investment/credit>.

### REFERENCES:

1. Bugel Y. (2001) Analysis of the quality of the structure of the loan portfolio of commercial banks in the

market conditions of management / Yu. Bugel // Ukrainian science: past, present, future: a collection of scientific works. – Ternopil: Economic Thought, – pp. 51-57. (in Ukrainian)

2. Gergel A. (2014) Directions of the analysis of the quality of the loan portfolio of the bank / A. Gergel // Development Management. – Kh.: KhNEU them. Seeds of Kuznets, pp. 92-94.

3. Serik Yu. V. (2012) Managing the Bank's Credit Portfolio / Yu.V. Serik // Economics and Management. – pp. 70-75.

4. Teptya O. V. (2014) Organization of a system for managing a loan portfolio in a commercial bank / O. V. Teptya // Bulletin of the KhNU. Economic sciences. – pp. 141-144.

5. Ukrainian Banking Portal. Official site [Elementary resource] – Access mode <http://banker.ua/official-rating/investment/credit>.

**Stadnyk Yu.A.**

Candidate of Economic Sciences,  
Senior Lecturer at Department of Economic Cybernetics  
Ivan Franko National University of Lviv

**Volyniuk Kh.I.**

Student  
Ivan Franko National University of Lviv

### APPLICATION OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL METHODS IN THE PROCESS OF FORMING A LOAN PORTFOLIO OF THE BANK

The study of the problem of forming a profitable loan portfolio of the bank, which is realized from the standpoint of real practice, is necessary for increasing the efficiency of each bank's activity. The purpose of the work is to evaluate the expected income at the level of a separate loan and loan portfolio of the bank using economic and mathematical methods and models.

The article is devoted to the application of methods of probability theory and mathematical programming in the process of carrying out credit operations by a bank institution. The estimation of the expected income of the bank from lending taking into account a single loan and a bank loan portfolio has been done in the paper. The estimation of the expected income for individual loans is carried out taking into account the probability of a loss of solvency by the borrower and the bank's attitude to the risk using the methods of probability theory and mathematical statistics. The authors present an example of the practical implementation of the methodology of such estimation. The model of forming of a bank loan portfolio is presented as a task of mathematical programming which takes into account the conditions of the limited credit resources and the regulating norms of the National Bank of Ukraine and the model is also carried by the authors through the practical calculations based on bank data.

A loan portfolio requires competent management. Its quality may also change the tasks of the banking institution – prevent the increase of risks and financial losses. Therefore, an important task of a banking institution is a rational risk assessment both at the level of a separate loan and at the level of the portfolio of bank loans.