МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ НА ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

RISK ASSESSMENT MODELLING IN INSURANCE BASED ON INTERVAL MATHEMATICS

УДК 519.21

Головій Ю.А.
аспірант кафедри
міжнародної економіки, політичної економії та управління
Національна металургійна академія України

У статті розглянуто теоретичне узагальнення методологічного математичного апарату наявних методів оцінювання ризиків у страхуванні на основі інструментарію інтервальної математики та моделей і методів, що дають змогу оцінити ризики в діяльності страхової компанії в умовах невизначеного зовнішнього середовища.

Ключові слова: *страхування, ризик, методи оцінювання ризику, ймовірність, інтервальна математика.*

В статье рассмотрено теоретическое обобщение методологического математического аппарата существующих методов оценивания рисков в страховании на основе инструментария интервальной математики и моделей и методов, позволяющих оценить риски в деятельности страховой компании в условиях неопределенной внешней среды.

Ключевые слова: *страхование, риск, методы оценивания риска, вероятность, интервальная математика.*

The article deals with a theoretical generalization of the methodological mathematical apparatus of existing methods of risk assessment in insurance in conditions of an indefinite external environment on the basis of the tools of interval mathematics and models and methods that allow assessing the risks in the activities of the insurance company.

Key words: *insurance, risk, risk assessment methods, probability, interval mathematics.*

Постановка проблеми. В умовах сучасних ринкових перетворень та формування якісно нових динамічних змін відбувається постійний контроль неоднозначного впливу безлічі різнорідних зовнішніх та внутрішніх факторів навколишнього середовища, тому у галузі страхування підвищену увагу почали приділяти проблематиці ризиковості діяльності, що має прямий чи посередній вплив на фінансовий стан страхових компаній. Незважаючи на актуалізацію дослідження ризиків функціонування у страховій галузі, існує безліч підходів до ідентифікації різноманітних видів ризиків та кількісної оцінки ризику, які зазвичай є різними модифікаціями аналізу чутливості кон'юнктури або аналізу ймовірного розподілу дохідності.

Але саме проблема відсутності методики оцінювання різних видів ризику функціонування страхових компаній України та відповідного їм математичного апарату, що реалізує під час економіко-математичного аналізу арифметику безпосередньо для роботи з невизначеностями, зокрема суб'єктивної природи, зумовила актуальність вибору оптимального методу аналізу ризиків у страхуванні на основі інтервальної математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичне підґрунтя у фундаментальних дослідженнях сутності теорії нечітких множин сформували Л.А. Заде, Е. Борель, Дж. Баклі та інші науковці.

Змістовність теоретичних та практичних аспектів оцінювання ризику та застосування математичних і статистичних методів в умовах невизначеності завжди залишались об'єктом економічного аналізу.

Ці аспекти досліджували відомі вітчизняні та зарубіжні вчені. Роботи Г. Бояджієва, Л. Димової, К. Запоунідіса, Д. Севастьянова, Р. Словінскі, Б. Флое, Г. Цимермана зробили значний внесок у розвиток і застосування теорії нечітких множин під час прийняття фінансових рішень.

Побудова математичних моделей для прийняття фінансових рішень на основі теорії нечітких множин в інвестиційному проектуванні набула розголосу завдяки А. Коффману, Х. Алусі, Х. Лафуенте, Дж. Баклі, а також А. Аверкіну, А. Алексєєву, А. Альохіну, А. Борисову.

Найбільш глибоко питання застосування теорії нечітких множин під час моделювання кількісної оцінки ризику інвестиційного проекту розглянуті А. Недосекіним.

Проблематика зростання ступеня впливу ризиків на результати діяльності компанії пов'язана зі швидкою зміною економічної ситуації, розширенням сфери фінансових відносин та фінансових інструментів, а також іншими факторами, що зумовлює розробку ефективного математичного апарату для роботи з невизначеностями, усвідомлення недоліків теоретико-ймовірнісних методів, що узагальнюють традиційні уявлення.

Нині в галузі страхування набирає обертів комплекс нових теорій і методів (включаючи теорію ймовірностей), що рухається до природного об'єднання в загальну теорію аналізу невизначеностей.

В результаті виникає проблема розроблення адекватної методики розрахунку фінансових показників проектів за наявності таких невизначеностей, що мають найчастіше суб'єктивну природу.

Тому задля глибокого та всебічного аналізу цієї системи й обґрунтування шляхів подальшого вдосконалення її функціонування доцільно використовувати методику аналізу ефективності та ризику на основі теоретико-ймовірнісного підходу за допомогою методів інтервальної математики.

Постановка завдання. Метою дослідження є розгляд особливостей наявних теоретико-ймовірнісних методів оцінювання ризиків у страхуванні та систематизація передумов сучасних методів оцінювання ризиків в умовах невизначеності у діяльності страхових компаній на основі інтервальної математики.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нині найбільшого поширення набули методики аналізу ефективності та ризику інвестицій на основі теоретико-ймовірнісного підходу. Загалом фінансовий ризик можна розглядати як ступінь визначеності фінансової втрати, що виражається в:

– недосягненні поставленої мети;
– невизначеності прогнозованого результату;
– суб'єктивності оцінки прогнозованого результату.

Можлива й інша інтерпретація ризику, а саме як ступеня варіабельності доходу, який може бути отриманий завдяки володінню цим видом активів [1].

Існує безліч підходів до кількісного оцінювання ризику, які зазвичай є різними модифікаціями аналізу чутливості кон'юнктури або аналізу ймовірного розподілу дохідності. Традиційно невизначеності, пов'язані з прогнозуванням майбутніх подій в економіці, інтерпретують з теоретико-ймовірнісної точки зору, що в багатьох практично важливих випадках може призводити до неадекватних результатів.

Однак найбільш ймовірним значенням прибутковості вона буде тільки в разі симетричного розподілу, в усіх інших випадках математичне очікування не має досить зрозумілого економічного сенсу, виступаючи скоріше математичною абстракцією. Підхід до оцінювання ризику інвестицій, що є більш обґрунтованим економічно, полягає в побудові ймовірного розподілу значень дохідності, обчисленні стандартного відхилення від середньої прибутковості та коефіцієнта варіації, який розглядається як ступінь ризику, асоційованого з цим активом. Таким чином, чим вищим є коефіцієнт варіації, тим більш ризиковим є цей вид активу [2].

Основні процедури цієї методики полягають у такому:

1) задаються прогнозні оцінки значень дохідності K_i та ймовірностей їх здійснення P_i (все це є суб'єктивними експертними оцінками);

2) розраховується найбільш ймовірна прибутковість K_b:

$$K_b = \sum_i K_i \cdot P_i\,; \tag{1}$$

3) розраховується стандартне відхилення (O_c):

$$O_c = \sqrt{\sum (K_i - K_b)^2 \cdot P_i}\,,; \tag{2}$$

4) розраховується коефіцієнт варіації (V):

$$V = \frac{O_c}{K_b}\,. \tag{3}$$

Справді, якщо відповідним чином віднормувати розподіл P_i, щоб він відповідав частотному, величина K_b буде відповідати суворому визначенню математичного очікування. Однак лише в разі симетричного розподілу P_i значення прибутковості буде найбільш ймовірним. В усіх інших випадках математичне очікування скоріше є математичною абстракцією, бо не має досить зрозумілого економічного сенсу. Відповідно, втрачають сенс параметри стандартного відхилення O_c та коефіцієнта варіації V [2].

В ситуації, що розглядається в разі несиметричного розподілу (бо симетричні гаусові розподіли в реальному житті досить рідкісні), мають сенс лише довірчі інтервали і, власне, самі вихідні розподілу. Далі виникає проблема оброблення цих інтервалів і розподілів, а також виконання необхідних арифметичних операцій над ними.

Нині існує деяка визначеність в галузях застосування цих методик, але комплекс нових теорій і методів рухається до органічного за змістом сполучення в єдину загальну теорію аналізу невизначеностей [2].

Аналіз характеру невизначеностей, що виявляються у фінансовій оцінці ризиків, дає змогу визначити, що в рамках нечітко інтервального підходу може бути проведена їх адекватна математична формалізація.

Водночас з'являється можливість безпосереднього проведення арифметичних операцій з параметрами, заданими в нечітко інтервальній формі, що неможливо під час їх опису частотними розподілами, а також можливість опису невизначеностей, що мають суб'єктивну природу, що є вкрай важливим під час прогнозів, що стосуються майбутніх подій [3].

При цьому уявлення різних невизначених характеристик в єдиній універсальній формі є однією з проблем математичної формалізації невизначених параметрів складних систем і окремих критеріїв [4].

Під час моделювання реальних складних систем на практиці деякі невизначені параметри можуть бути задані нечіткими інтервалами, інші – чіткими інтервалами, треті – частотними розподілами ймовірностей [2].

Найменший обсяг корисної інформації та найбільша невизначеність мають місце під час опису невідомих параметрів систем або критеріїв якості чіткими інтервалами, що відповідає ситуації, коли точно відомі лише межі допустимих значень аналізованого параметра [4].

При цьому відсутня будь-яка кількісна або якісна інформація про можливості (ймовірності) реалізації різних його значень усередині заданого інтервалу [4].

Математично опис невизначених величин здійснюється за допомогою стандартних характеристичних функцій, які можна розглядати як функції приналежності відповідним чітким інтервалам. За наявності додаткової якісної інформації про значення параметра всередині інтервалу без кількісної оцінки цього відношення математична формалізація може бути адекватно реалізована за допомогою трапецеїдальних нечітких інтервалів.

Але якщо відносини між можливостями реалізації різних значень параметра можна охарактеризувати конкретними числами, то нечіткі інтервали вироджуються у ймовірнісні розподіли. На основі використання цих трьох базових способів формалізації, а саме чітко інтервального, нечітко інтервального та розподілу ймовірностей, виникає проблема приведення різних описів невизначеностей до єдиної форми подання.

Приведення нечітко інтервальної невизначеності до форми частотних розподілів неможливе, оскільки для цього відсутня необхідна кількісна інформація.

У загальному вигляді механізм формування логічного висновку складається з чотирьох етапів, таких як введення нечіткості (фазифікація), формування нечіткого висновку, композиція та приведення до чіткості (дефазифікація) [6]. Тому як єдиний універсальний спосіб опису невизначеностей використовують нечітко інтервальний підхід. Чітко інтервальний опис, очевидно, є його окремим випадком. Функції розподілу ймовірностей *f(X)* транспонуються в трапецеїдальні нечітко інтервальні функції належності *m(X)* шляхом частково-лінійної апроксимації конкретних залежностей *f(X)*. Зрозуміло, що при цьому неминуча втрата частини наявної інформації. Але, переводячи частотні розподіли в нечітко інтервальні числа таким чином, щоб фіксовані довірчі інтервали частотного розподілу відповідали так званим *a*-рівням нечітко інтервального числа, можемо зберегти частину найбільш цінної інформації.

Ця методика трансформації частотних розподілів в нечіткі інтервали дає змогу зберегти кількісну інформацію про розміри та місце розташування на осі абсцис довірчих інтервалів, а також на якісному рівні зберегти інформацію про частоти, яким після трансформації будуть відповідати значення функцій приналежності нечіткого інтервалу на отриманих в результаті трансформації α-рівнях.

Інтервальні числа задаються інтервалами їх можливих значень без зазначення будь-якого розподілу можливих значень числа всередині заданого інтервалу (вони вивчаються в інтервальній математиці) [3].

Загалом нечітко інтервальна математика зводиться до розкладання нечітких інтервалів на складові α-рівні та подальшого оперування з ними в рамках інтервальної математики.

У більшості практичних застосувань найбільш важливо мати інформацію тільки про два інтервали, що відповідні α-рівням:

1) $\mu(x) = 0$ – основа інтервалу;
2) $\mu(x) = 1$ – інтервал найбільш можливих значень.

Тому вважається доцільною апроксимація усіх одержуваних нечітких інтервалів до трапецеїдальної форми. Остання дуже зручна на практиці ще й тому, що однозначно описується своїми реперними точками *(X1, X2, X3, X4)*. Таке чотирьохвимірне уявлення значно зменшує кількість обчислень під час виконання арифметичних операцій та знижує невизначеність підсумкових результатів. Це є наслідком самої природи інтервальної математики, яка характеризується обов'язковим зростанням ширини результуючих інтервалів зі збільшенням числа проміжних арифметичних операцій з інтервальними числами.

Отже, нехай є вибірка *X = (X1,…, Xn)* з розподілу $\Im_\theta$ з невідомим параметром $\theta \in \Theta \subseteq \mathrm{R}$. Існує інший підхід до оцінювання, за якого ми зазначаємо інтервал, що накриває параметр із заданою наперед ймовірністю. Такий підхід називається інтервальним оцінюванням. Але чим більше впевненість у тому, що параметр лежить в інтервалі, тим ширше інтервал. Тому шукати діапазон, в якому θ лежить з ймовірністю 1, немає сенсу, тому що це вся область Θ [5].

Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Інтервал $(\theta^-, \theta^+) = (\theta^-(X,\varepsilon), \theta^+(X,\varepsilon))$ називається довірчим інтервалом для параметра θ рівня довіри $1-\varepsilon$, якщо для будь-якого $\theta \in \Theta$.

$$\mathrm{P}_\theta(\theta^- < \theta < \theta^+) \geq 1-\varepsilon \,. \qquad (4)$$

Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Інтервал $(\theta^-, \theta^+) = (\theta^-(X,\varepsilon), \theta^+(X,\varepsilon))$ називається асимптотичним довірчим інтервалом для параметра θ (асимптотичного) рівня довіри $1-\varepsilon$, якщо для будь-якого $\theta \in \Theta$.

$$\lim\inf\ \mathrm{P}_\theta(\theta^- < \theta < \theta^+) \geq 1-\varepsilon \,. \qquad (5)$$

Насправді тут йдеться, звичайно, не тільки про один інтервал, але й про послідовності інтервалів, що залежать від обсягу вибірки n.

Випадкові тут межі інтервалу (θ^-, θ^+), тому формулу $\mathrm{P}_\theta(\theta^- < \theta < \theta^+)$ інтерпретують як «інтервал (θ^-, θ^+) накриває параметр θ» [5].

Нерівність $1-\varepsilon$ зазвичай відповідає дискретним розподілам, коли не можна зобов'язатися домогтися рівності. Якщо ймовірність довірчого інтервалу накривати параметр в точності дорівнює $1-\varepsilon$ (або прямує до $1-\varepsilon$), інтервал називають точним (або асимптотично точним) довірчим інтервалом рівня довіри $1-\varepsilon$.

Отже, нехай *υ = f (x, y, …, z)* – звичайна якісна функція від якісних детермінованих аргументів. Якщо інформація про досліджуваний об'єкт неповністю визначена, аналогом функції *f* стає відповідна недетермінірована функція *F*, що вводиться таким чином [6]. Нехай аргументи *x, y, …, z* функції *f* визначені не повністю, а з точністю до множин можливих значень: $x \in X, y \in Y, ..., Z \in Z$. Тоді значення функції *f* також виявиться визначеним не в повному обсязі, а у вигляді відповідної множини значень: $v \in V$. При цьому залежність множини *V* значень функції *f* від множин *X,Y,.,Z* значень її аргументів і є функцією *F*, яка може бути визначена за допомогою теоретико-множинної конструкції:

$$V = F(X,Y,...,Z) \equiv \{f(x,y,...,z) \mid x \in X, y \in Y,...,z \in Z\}. \quad (6)$$

Отже, значення *V* функції *F* при значеннях її аргументів *X, Y,.,Z* є множиною значень вихідної функції *f*, коли її аргументи *x, y,…,z* проходять безліч значень *X, Y, …, Z*. Перехід від *f* до *F* називають роздетермінізацією функції *f*. Функція *F* перетворює множинні значення аргументів на множинне значення самої функції. У зв'язку з цим функцію *F* можна назвати недетермінованою, а прийняті нею самою та її аргументами значення – недетермінованими числами [7]. Основним завданням недетермінованої математики та логіки є множинне обчислення функцій, тобто пошук множинних значень *V* недетермінірованих функцій *F* за заданими множинними значеннями *X, Y, …, Z* їх аргументів.

В окремому випадку, коли безлічі *X, Y, …, Z* є числовими та мають вигляд замкнутих інтервалів, а функція *f* – безперервною, множина *V* також виявляється числовою у вигляді замкнутого інтервалу.

Таким чином, в цьому конкретному випадку недетермінірована функція *F* перетворює інтервальні значення аргументів на інтервальне значення самої функції.

У зв'язку з цим функція *F* може бути названа інтервальною, а прийняті нею самою та її аргументами значення – інтервальними числами [7].

Будь-яке інтервальне число може бути записано у вигляді деякого замкнутого дійсного інтервалу $\bar{a} = [a_1, a_2]$. В результаті довільна інтервальна функція може бути визначена формально такою теоретико-множинною конструкцією:

$$\tilde{\upsilon} = F(\tilde{x},\tilde{y},...,\tilde{z}) \equiv \{f(x,y,...,z) | x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y},...,z \in \tilde{z}\}; \quad (7)$$

де визначено $\tilde{x} = [x_1, x_2], \tilde{y} = [y_1, y_2],...,\tilde{z} = [z_1, z_2]$, $\tilde{\upsilon} = [\upsilon_1, \upsilon_2]$.

Основним завданням інтервальної математики та логіки є обчислення довільної заданої інтервальної функції, тобто пошук інтервальних значень $\tilde{\upsilon}$ інтервальних функцій *F* за заданим інтервальним значенням $\tilde{x},\tilde{y},...,\tilde{z}$ їх аргументів. Множина всіх інтервальних чисел спільно з визначеними на ньому елементарними операціями утворює математику інтервальних чисел [7].

Висновки з проведеного дослідження. В результаті аналізу наявних підходів до оцінювання ризиків страхових компаній можна зробити висновок, що розмір страхових резервів формується під впливом багатьох факторів. Їх складно точно визначити заздалегідь, але можна зазначити інтервал коливання цієї величини, побудувавши модель за умови інтервально заданих параметрів.

За допомогою інтервального підходу відбувається визначення ймовірності отримання певного результату в заданих і необхідних межах, а інтервальна математика дає підґрунтя для вирішення найпростіших та більш складних завдань вивчення невизначених систем, наприклад оцінювання майбутнього обсягу страхових резервів.

Це дасть змогу за умови інтервально заданих параметрів мати можливість більш точного аналізу, бо саме аналіз рівня страхових ризиків є одним з основних у плануванні майбутньої тарифної політики компанії та визначенні перспективи розвитку ринку страхування у країні.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Черваньов Д. Менеджмент інвестиційної діяльності підприємств: навч. посіб. Київ: Знання-Прес, 2003. 622 с.
2. Севастьянов П. Финансовая математика и модели инвестиций: курс лекций. Гродно: ГрГУ, 2001. 183 с.
3. Севастьянов П., Севасьянов Д. Оценка финансовых параметров и риска инвестиций с позиций теории нечетких множеств. Надежные программы. 1997. № 1. С. 10–19.
4. Глонь О., Дубовой В. Моделювання систем керування в умовах невизначеності: монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ Вінниця, 2004. 170 с.
5. Чернова Н. Математическая статистика: учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. 148 с.
6. Левин В. Расчет динамических процессов в дискретных автоматах с неопределенными параметрами с помощью недетерминистской бесконечнозначной логики. Кибернетика и системный анализ. 1992. № 3. С. 15–30.
7. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир, 1987. 360 с.

REFERENCES:

1. Chervanov D. (2003) Menedzhment investytsiynoyi diyalnosti pidpryyemstv [Investment management company]: Textbook. guidances. – Kiev: Znannya-Pres (in Ukrainian).
2. Sevastyanov P. (2001) [Finansovaya matematika i modeli investitsiy] Mathematical finance and investment model: Grodno: GrGU (in Belarus).
3. Sevastyanov P. (1997) [Otsenka finansovykh parametrov i riska investitsiy s pozitsiy teorii nechetkikh mnozhestv] Estimation of financial parameters and risk of investments from positions of the theory of fuzzy sets // Nadezhnyye programmy. – no. 1, pp. 10–19 (in Belarus).
4. Glon O., Dubovoy V. (2004) [Modelyuvannya system keruvannya v umovakh nevyznachenosti] Simu-

lation of control under uncertainty. Vinnitsa: UNIVERSUM Vinnitsa, pp. 170 (in Ukrainian).
5. Chernova N. (2007) [Matematicheskaya statistika: Uchebnoye posobiye] Mathematical Statistics: Textbook / Novosibirsk, Novosibirsk State University, pp. 148 (in Russian).
6. Levin V. (1992) [Raschet dinamicheskikh protsessov v diskretnykh avtomatakh s neopredelennymi parametrami s pomoshch'yu nedeterministskoy beskonechnoznachnoy logiki] Calculation of dynamic processes in discrete automata with indeterminate parameters using non-deterministic infinite-valued logic // Kibernetika i sistemnyy analiz, no. 3, pp. 15–30 (in Ukrainian).
7. Alefeld G., Hertsberher U. (1987) [Vvedeniye v interval'nyye vychisleniya] Introduction to interval computations. Moscow: Mir, pp. 360 (in Russian).

Golovyi J.A.
Postgraduate Student at Department of International Economics,
Political Economy and Governance
National Metallurgical Academy of Ukraine

RISK ASSESSMENT MODELLING IN INSURANCE BASED ON INTERVAL MATHEMATICS

Despite the actualization of research on the risks of operating in the insurance industry, the problem of the lack of a methodology for assessing the various types of risk of the operation of insurance companies and the corresponding mathematical apparatus that implements work with uncertainties caused the relevance of choosing the optimal method of risk analysis in insurance on the basis of interval mathematics.

Currently, the most widely used methods of analyzing the effectiveness and risk of investments based on the theory-probabilistic approach.

An approach to assessing investment risk, which is more economically feasible, is to build a probable distribution of yield values, calculating the standard deviation from the average yield and the coefficient of variation, which is considered as the degree of risk associated with this asset.

An analysis of the nature of uncertainties that manifests itself in the financial risk assessment allows us to determine that their adequate mathematical formalization can be carried out within the fuzzy-interval approach.

In practice, when designing real complex systems, some uncertain parameters can be specified as fuzzy intervals, clear intervals, frequency probabilities distributions.

Mathematically, the description of uncertain variables is carried out using standard characteristic functions, which can be considered as a function of belonging to the corresponding clear intervals.

At the same time, interval numbers are given by the intervals of their possible values without specifying any distribution of possible values of the number inside the given interval.

As a result of the analysis of existing approaches to the assessment of the risks of insurance companies, it can be concluded that using the interval approach one can determine the probability of obtaining a certain result in the given and necessary limits, and interval mathematics allows solving the simplest and most difficult tasks of studying fuzzy systems, such as estimating the future volume of insurance reserves.